



TITLE:

高速で回転する円筒容器内の流れ (流体力学における混合境界値問題)

AUTHOR(S):

橋本, 潔; 武田, 英徳

CITATION:

橋本, 潔 ...[et al]. 高速で回転する円筒容器内の流れ (流体力学における混合境界値問題). 数理解析研究所講究録 1978, 335: 122-137

ISSUE DATE:

1978-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104200>

RIGHT:

高速で回転する円筒容器内の流れ

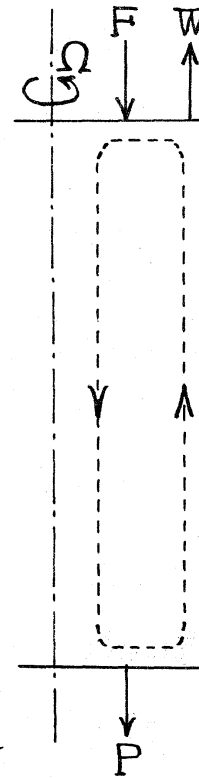
京大 航空工 橋本 潔
武田 英徳

§1 序

この小論では高速で回転する円筒容器内の気体の流れを取り扱う。これはウランの遠心分離機による分離・濃縮に関連した問題であり、本論に入る前にウランの遠心分離法について簡単に述べる。天然ウランは主として質量数が235のウラン(^{235}U)と238のウラン(^{238}U)の2つの同位体から構成されている。この内核分裂を起して原子力発電用の燃料として用いられるのは軽い方の同位体 ^{235}U である。ところが天然の状態での ^{235}U と ^{238}U のそれぞれの比率は0.7%および99.3%であり ^{235}U の含有率は非常に低い。原子力発電用の燃料としては、 ^{235}U を3%程度にまで濃縮してやる必要がある。ウランの分離・濃縮はまずウランをフッ素でとかして六フッ化ウラン(UF_6)のガスにし、気体の状態で分離を行う。ウランの遠心分離機

は 高さ 1m 半径 10cm 程度の細長い円筒である。この中にウランの同位体のガスを導入し、毎分 30000 回転位の高速で回転させる。すると軽いオの同位体 $^{235}\text{UF}_6$ は中心部に、逆に重いオの $^{238}\text{UF}_6$ は側壁のオに集って来て、半径方向に分離が起る。従って中心部から抜き取ってやれば

^{235}U が少し濃縮された形で取り出せる事になる。これを何回もくり返して 3% 程度にまで濃縮してゆく。これが遠心分離法と呼ばれる方式で、我国やヨーロッパ諸国で採用されている方式であり、現在アメリカが採用しているガス拡散法に比べ経済性の点で優れている。しかし、ただ半径方向にだけ分離を起してやるだけでは効率が悪いので、実際には円筒容器内に強制的に弱い循環流をつけてやる事が試みられている。例えば上端板を熱し、下端板を冷やす事により上下端板に小さな温度差を与える。その時上端板付近の流体は熱せ



F: Feed
P: Product
W: Waste

図1

られて軽くなり中心部に向い、逆に下端板付近の流体は冷されて重くなり側壁のオへ振り飛ばされる。その結果、子午面内に図1の様な循環流が発生する。 ^{235}U は半径方向に分離されて中心部に集ってくるが、中心部の下向きの循環流に乗って次第に濃縮されながら下端板に達する。従って下端板から抜き出してやればよ

い(Product)。逆に ^{238}U のイオンは側壁のイオンへと集ってくるが、そこでの上向きの循環流に乗って上端板に向う。上端板の側壁に近い所から抜き出したもの(Waste)は ^{238}U が多く含まれている事になる。この様に遠心分離機内に弱い向流(Counter current)を作り出してやる事により、回転軸方向にも同位体の分離を進めて効率の改善が計られている。

遠心分離機内の流れは、回転流体の典型として理論的に興味深いだけではなく、実際的な面でも重要な問題である。というのは、一つの分離機の性能を評価するには、その分離機内での同位体の分布を知らなければならない。それには拡散の式を解けば良いわけだが、その際輸送項の計算に流れの場が必要となるからである(特に回転軸方向の流れのプロファイルが重要になる)。

我々が以下で取り扱う問題は次の様になる。まず円筒容器と同じ角速度 Ω で剛体回転している気体を考え、これを基本状態とする。基本状態では気体は一様な温度 T_0 を持つとする。この基本状態に対して、上下の端板に小さな温度差を与えた時、あるいは上下端板の角速度を少し違えた場合、あるいは上下端板から流体の流出・流入を行った場合に、円筒内部にどのような流れが生ずるかという事である。解析にあたっては、簡単の為軸対称定常流のみを取り扱う。基本的な仮定としては、系の回転が非常に速いので、遠心力に比べ重力の影響を無視するという事、又内部に発生す

る流れは充分弱く剛体回転からのずれが小さいとし(強い循環流を発生させると同位体が混ってしまって逆効果)線形理論の範囲内で流れの解析を行うという事である。

§2 基礎方程式

流れの解析にあたっては、円筒容器と同じ角速度 Ω で回転する円柱座標系 (r, θ, z) を導入する。 z 軸は回転軸と一致させ、原点は z 軸上の上下の端板の中点をとる。

まず円筒内の気体が一様な温度 T_0 、角速度 Ω で剛体回転している基本状態を考えよう。その時の圧力 P_B 、密度 ρ_B は静的な釣り合の式から簡単に解けて

$$\begin{aligned} P_B &= P_0 \varepsilon_B, \quad \rho_B = \rho_0 \varepsilon_B, \quad P_0 = R \rho_0 T_0, \\ \varepsilon_B &= \exp \left\{ \frac{1}{2} G_0 (r^2 - 1) \right\}, \quad G_0 \equiv \Omega^2 L^2 / R T_0. \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで P_0, ρ_0 は基準の圧力・密度で今の場合側壁上の値がとられている。又、 G_0 は無次元のパラメーターで圧縮性を示す尺度である。 R は気体定数、 L は円筒の半径で以下 L を代表長にとる。

剛体回転からのずれの量に対する線形の無次元基礎方程式、即ち、連続の式、運動方程式の r -, θ -, z -成分、及びエネルギー式はそれぞれ次の様になる。

$$\operatorname{div} \mathcal{W} + G_0 r u = 0, \quad (2)$$

$$-2\mathcal{U} + rT + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{E}{\varepsilon_B} \left(\mathcal{L}u + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \mathcal{W} \right), \quad (3)$$

$$2u = \frac{E}{\varepsilon_B} \mathcal{L}v, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{E}{\varepsilon_B} \left(\Delta w + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathcal{W} \right), \quad (5)$$

$$-4kru = \frac{E}{\varepsilon_B} \Delta T \quad (6)$$

$$\text{そこで } \operatorname{div} \mathcal{W} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{r^2},$$

$$k \equiv (\Gamma - 1) P_r G_0 / 4\Gamma, \quad E \equiv \mu / \rho_0 \Omega L^2$$

であり、 u, v, w は速度ベクトル \mathcal{W} の r, θ, z -成分である。又、 Γ は比熱比、 P_r はプラントル数であり、 UF_6 の場合それぞれ 1.067 及び 1.072 である。 E は Ekman 数と呼ばれ粘性項とコリオリカの比になっており μ は粘性係数である。ウランの遠心分離機の実際の運転状況 (毎分 30000 回転位) では $E \sim O(10^{-7})$, $G_0 \sim O(10)$, $k \sim O(10^{-1})$ 程度になる。

境界条件としては

$$u=0, \quad v=V_{\pm}(r), \quad w=E^{\frac{1}{2}} W_{\pm}(r), \quad \alpha_1 T + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial z} = T_{\pm}(r) \quad \text{at } z=\pm A,$$

$$u=0, \quad v=V_s(z), \quad w=0, \quad T=T_s(z) \quad \text{at } r=1$$

とする。ここで上下の端板は $z=\pm A$ の所にあるものとした。 α_1, α_2 は定数である。もし上下の端板上で温度分布が $T=T_{\pm}(r)$ at $z=\pm A$ という風に与えられている場合には $\alpha_1=1, \alpha_2=0$ とすればよく、又上下端板が断熱板の場合には $\alpha_1=0, \alpha_2=1, T_{\pm}(r)=0$ とすればよい。側壁上では温度分布 $T_s(z)$ が与えられているとした。側壁が断熱壁の場合は、Matsuda, Hashimoto & Takeda (1976) 及び Matsuda & Takeda (1977) によって取り扱われている。

Ekman 数が非常に小さい事から、上下端板及び側壁の上に薄

い境界層が発達する事が予想される。上下の端板上に発達する境界層は Ekman 層と呼ばれ厚さは $O(E^{\frac{1}{2}})$ である。側壁上の境界層は Stewartson 層と呼ばれ Stewartson (1957) によってその構造が明らかにされた。Stewartson 層は厚さ $O(E^{\frac{1}{3}})$ の層とそれより少し厚い $O(E^{\frac{1}{4}})$ の厚さの層からなる 2 重構造を持つ。従って円筒内の流体の領域は上下端板上の Ekman 層、側壁上の Stewartson 層、及びそれ以外の領域 (inner region) の 3 つに分ける事ができる。我々はまず inner region の解析から始めるが後にみる様にこの領域を支配する方程式は楕円型となる。この方程式の上下端板上での境界条件及び側壁での境界条件を与える為に、Ekman 層及び Stewartson 層の解析を行う。

以下数学的な議論に移る前に基礎方程式の特徴的な事について少しふれておく。(3)式は θ -方向の運動方程式だが、これを見てわかる様に inner region では $u \sim O(E)$ で非常に小さい。従って流体の大部分の領域では流体は r 方向に輸送され得ない。 r 方向の輸送は上下 Ekman 層内だけで可能である。(3)式の右辺 (粘性項) は Ekman 層内では $O(1)$ にまで立上ってくる (薄層子では ε の 2 階微分を含む)。従って u も $O(1)$ にまで立上ってくる。又、(6)式はエネルギー式だが、右辺は通常の熱伝導の項である。従って左辺は heat source の項と見なせる。この項は u に比例している事から、これは流体が r 方向に輸送される時、基本状態での r 方向の圧力成層が

ある事により流体粒子の膨張・収縮を伴うが、その際に熱が発生・吸収される事を示す。上で見た様に r 方向の流体の輸送は主として Ekman 層内で行なわれるから、熱の発生・吸収も又 Ekman 層内で顕著になる。上下端板が熱伝導性の良い場合には、Ekman 層内で発生した(吸収)大きな熱は端板を通して自由に逃げ得る。一方端板の熱伝導性が悪くなるとこの熱量は inner region を通って側壁へと輸送されねばならない。この事から端板の熱的な性質が Ekman 層内、ひいては円筒内の子午面流れに大きな影響を持つ事が予想される。

§3 Inner region

Inner region での変数のスケールリングを次の様に行う。

$$u = E u_i, \quad v = v_i, \quad w = E^{\frac{1}{2}} w_i, \quad T = T_i, \quad P = P_i \quad (7)$$

ここで suffix i は inner region の成分を表す。その時方程式は

$$\frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \quad -2v_i + rT_i + \frac{\partial P_i}{\partial r} = 0, \quad 2u_i = \varepsilon_B^{-1} \omega v_i, \quad (8)-(10)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} = 0, \quad -4kr u_i = \varepsilon_B^{-1} \Delta T_i \quad (11), (12)$$

となる。ただしに w_i と P_i が z に依らない事がわかる。 $f(r) \equiv -\frac{dP_i}{dr}$ とし r -方向の運動方程式(9)を書き直すと

$$v_i = \frac{1}{2} \{ rT_i - f(r) \}. \quad (13)$$

関係式(13)は Thermal wind relation と呼ばれる。これは r -方向に遠心力による浮力及び圧力勾配が働くとそれに垂直な方向即ち θ -方向に一種の風が吹くというもので地球物理で言う地衡風(コリオリ力と圧力勾配とのバランスから等圧線に平行に吹く風)

に対応するものである。さて上の方程式から T_i 以外のすべての量を消去すると T_i について

$$(1+kr^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T_i + \frac{1+3kr^2}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} = kr\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)f \quad (14)$$

を得る。これは T_i に関する楕円型の方程式で、 T_i について $z = \pm A$ 、及び $r=1$ における境界条件が得られれば原理的に解ける。ただし (14) の右辺には まだ決定されていない圧力勾配 $f(r)$ を含んでおり、又 $w_i(r)$ も今の段階では未知関数である。 T_i の $z = \pm A$ における境界条件及び $f(r)$, $w_i(r)$ は Ekman 層の解析の後に始めて決定される。次に Ekman 層の解析に移る。

§ 4 Ekman 層

変数のスケリングは

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}_i + \hat{v}, \quad w = E^{\frac{1}{2}}(w_i + \hat{w}), \quad T = T_i + R\hat{T}, \quad P = P_i + E\hat{P} \quad (15)$$

と行う。ここで caret (^) は解の Ekman 層成分を示す。同時に Ekman 層内での z 方向にストレッチされた境界層変数 ζ を $\zeta \equiv E^{-\frac{1}{2}}(A + jz)$ で定義する。 j は上及び下の端板でそれぞれ $+1$ 及び -1 をとるものとする。

その時、Ekman 層における方程式は

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + G_0 r \hat{u} - j \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta} = 0, \quad (16)$$

$$-2\hat{v} + kr\hat{T} = \varepsilon_B^{-1} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \zeta^2}, \quad (17)$$

$$2\hat{u} = \varepsilon_B^{-1} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \zeta^2}, \quad (18)$$

$$-j \frac{\partial \hat{P}}{\partial \zeta} = \varepsilon_B^{-1} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \zeta^2} - \frac{j}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{u}}{\partial \zeta} \right) \right\}, \quad (19)$$

$$-4r\hat{u} = \varepsilon_B^{-1} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \zeta^2}. \quad (20)$$

方程式 (17), (18), (20) より \hat{u}, \hat{v} を消去して

$$\frac{\partial^4 \hat{T}}{\partial \zeta^4} + 4\sigma^4 \hat{T} = 0, \quad \text{ただし } \sigma \equiv \varepsilon_B^{\frac{1}{2}} (1 + Rr^2)^{\frac{1}{4}} \quad (21)$$

を得る。この式は容易に積分できる。一旦 \hat{T} が求まると $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ もまた \hat{T} から求める事ができ、最終的な形は次の様になる。

$$\hat{u} = -\frac{(1+Rr^2)^{\frac{1}{2}}}{2r} C_{\pm}(r) e^{-\sigma\zeta} \sin \sigma\zeta, \quad (22)$$

$$\hat{v} = -\frac{1}{2r} C_{\pm}(r) e^{-\sigma\zeta} \cos \sigma\zeta, \quad (23)$$

$$\hat{w} = \frac{\delta}{4\sigma} (1+Rr^2)^{\frac{1}{2}} C_{\pm}(r) e^{-\sigma\zeta} \left[\left\{ \frac{1}{r} \frac{dC_{\pm}}{dr} + \frac{G_0}{2} + \frac{R}{2(1+Rr^2)} \right\} \right. \\ \left. \times (\sin \sigma\zeta + \cos \sigma\zeta) - \frac{2}{r} \frac{d\sigma}{dr} \zeta \cos \sigma\zeta \right], \quad (24)$$

$$\hat{T} = C_{\pm}(r) e^{-\sigma\zeta} \cos \sigma\zeta. \quad (25)$$

ここで $C_{\pm}(r)$ は (21) を積分する際に出て来る未知関数であり \pm の符号はそれぞれ上, 下の Ekman 層に対応する。又、 $u=0$ at $z=\pm A$ の条件だけは使っている。残っている条件式としては上下端板での v, w, T に対する境界条件及び inner region での thermal wind relation がやはり $z=\pm A$ で成り立たなければならぬから以上 8 つの条件式がある事になる。

我々が欲しいのは T_i に対する $z=\pm A$ での条件及び U_i の $z=\pm A$ での値そして $C_{\pm}(r), w_i(r), f(r)$ の都合 8 つの未知関数の値及び条件であるから、これらを完全に決定できる。結果のみを示すと、まず T_i の $z=\pm A$ での条件として、

$$\left\{ \alpha_1 (1+Rr^2) + \alpha_2 \frac{\delta \sigma R r^2}{E^{\frac{1}{2}}} \right\} T_i + \alpha_2 \frac{\partial T_i}{\partial z} \\ = T_{\pm} + (\alpha_1 R + \alpha_2 \frac{\delta \sigma R}{E^{\frac{1}{2}}}) (r f + 2r V_{\pm}) \text{ at } z=\pm A. \quad (26)$$

又 $f(r)$ については

$$f(r) = \frac{r}{2} \{ T_i(+A) + T_i(-A) \} - \frac{2}{r\sigma} \int_0^r r \varepsilon_B (W_+ - W_-) dr - (V_+ + V_-). \quad (27)$$

(27)により $f(r)$ が T_i の形で表わされたから (26) が方程式 (14) に対する $z = \pm A$ での条件を与える事になる。 $r=1$ (側壁上) での T_i に対する境界条件は Stewartson 層の解析を通じて与えられる。一旦 (14) が解けて T_i が求まると

$$u_i = -\frac{1}{4Rr\epsilon_B} \Delta T_i, \quad v_i = \frac{1}{2} \{rT_i - f(r)\}, \quad (28), (29)$$

$$w_i = -\frac{(1+Rr^2)^{\frac{1}{2}}}{8\delta} \left\{ \frac{2}{r} \frac{dC_s}{dr} + \left(G_0 + \frac{R}{1+Rr^2} \right) C_s \right\} + \frac{1}{2} (W_+ + W_-) \quad (30)$$

により inner region の解は完全に決定される。ここで $C_s \equiv \frac{r^2}{2} \{T_i(A) - T_i(-A)\} - r(T_+ - T_-)$ 。

次の事に着目したい。 T_i を支配する方程式 (14) は楕円型だから上下端板の影響だけでなく側壁の影響も受ける。従って (28), (29) より u_i, v_i も側壁の影響を受ける事になる。一方 w_i は C_s を通して T_i に依存しているわけだが T_i の $z = \pm A$ における値にしか依らない。故に T_i の $z = \pm A$ における値が (26) より陽に求める事ができる場合には側壁の影響を受けない事がわかる。 (26) より明らかな様に $\alpha_2 = 0$ の場合は $T_i(\pm A)$ が陽に解けるから、この時、即ち上下端板の熱伝導性が良い場合には、 w_i については上下端板の条件だけで完全に決定され側壁の影響は受けない事がわかる。

§ 5 Stewartson 層

T_i に対する方程式 (14) の $r=1$ における境界条件を求めるには Stewartson 層の解析が必要である。 Stewartson 層は一般に 2重構造をしているが、今簡単の為に $E^{\frac{1}{3}}$ -層 (厚さが $O(E^{\frac{1}{3}})$ の薄い層) しかないとして解析を進め、どのような条件のもとで $E^{\frac{1}{4}}$ -層 (厚い層) が必要となるかを考える事にする。 ($E^{\frac{1}{4}}$ -層が存在する場合については Matsuda & Takeda (1977), Matsuda & Hashimoto (1976, 1977) 参照)

$E^{\frac{1}{3}}$ -層での変数のスケーリングは

$$u = E^{\frac{1}{3}} \bar{u}, v = v_c + \bar{v}, w = \bar{w}, T = T_c + R \bar{T}, P = P_c + E^{\frac{1}{3}} \bar{P} \quad (31)$$

と行う。又 x 方向にストレッチされた境界層変数 $\eta [\equiv E^{-\frac{1}{3}}(1-r)]$ を導入する。Bar (—) のついているのは $E^{\frac{1}{3}}$ -層の成分を示す。今 $E^{\frac{1}{4}}$ -層がない場合を考えているので $\eta \rightarrow \infty$ の極限ですべての $E^{\frac{1}{3}}$ -層成分はゼロにならなければならない。方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad -2\bar{v} + R\bar{T} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} = 0, \quad (32), (33)$$

$$2\bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}, \quad -4\bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2}. \quad (34)-(36)$$

(34) 及び (36) から \bar{u} を消去して

$$\bar{v} = -\frac{1}{2} \bar{T} \quad (37)$$

を得る。これが $E^{\frac{1}{3}}$ -層における Thermal wind relation に相当するものである。

(32)-(36) から \bar{T} 以外のすべての量を消去すると \bar{T} について

$$\frac{\partial^6 \bar{T}}{\partial \eta^6} + 4(1+R) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = 0 \quad (38)$$

を得る。解の形として z 方向に Fourier 展開したものを仮定する。即ち

$$\bar{T} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta) \cos(m\pi \frac{z+A}{2A}) \quad (39)$$

(39) を (38) に代入して Fourier 係数 $f_m(\eta)$ について

$$\frac{d^6 f_m}{d\eta^6} - \omega_m^6 f_m = 0, \quad \text{ただし } \omega_m = \left(\frac{m\pi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} (1+R)^{\frac{1}{6}} \quad (40)$$

を得る。(40) の解の内 3 つは $\eta \rightarrow \infty$ で指数関数的に発散するので採用しない。残り 3 つの独立解について $\eta=0$ での境界条件を 3 つ与えれば $f_m(\eta)$ 従って \bar{T} は完全に決定されることになる。それらの境界条件を求める前に次の事について注意しておこう。(40) は一般に exponential type の解

を持つが $m=0$ の時だけは例外である。 $m=0$ の時 $w_0=0$ だから $f_0(\eta)$ は η について 5 次の多項式となる。しかし $\eta \rightarrow \infty$ で $f_0 \rightarrow 0$ となる為には多項式の係数はすべてゼロ 即ち $f_0(\eta) \equiv 0$ でなければならぬ。この事から E^4 -層がない場合には \bar{T} は constant part (z に Fourier 展開した時の) を持ち得ない事になる。さて $\eta=0$ における $f_m(\eta)$ の境界条件を求めよう。まず $\bar{u} = \frac{1}{4} \bar{T}''$, $\bar{w} = -\frac{1}{4} \int_{-A}^z \bar{T}''' dz$ であるから (dash は η についての微分を示す) $\eta=0$ で $u=w=0$ より

$$f_m''(0) = f_m'''(0) = 0 \quad (41)$$

を得る。第3番目の境界条件は v と T に関する条件から出てくる。即ち

$$T = T_i + \bar{T} = T_s(z), \quad v = v_i + \bar{v} = v_s(z) \quad \text{at } r=1 \quad (42), (43)$$

及び Thermal wind relations (13), (37) より T_i, \bar{T} を解いて

$$T_i = \frac{1}{1+\kappa} (\kappa f + T_s + 2\kappa v_s) \quad \text{at } r=1, \quad (44)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{1+\kappa} (-f + T_s - 2v_s) \quad \text{at } \eta=0. \quad (45)$$

(44) が T_i に対する $r=1$ での境界条件を与える。又 (45) を z 方向に、

Fourier 展開して その m 次の係数が $f_m(0)$ の値を定める。ただし $f_0(\eta) \equiv 0$

より
$$\int_{-A}^A \{-f(1) + T_s(z) - 2v_s(z)\} dz = 0 \quad (46)$$

という制限がつく。もしこの制限が破れる様な境界条件のもとでは constant part 接続の為に E^4 -層が必要となる。

§6 Inner region の解と数値計算例

T_i に対する境界条件 (26) 及び (44) が得られたから残された問題はこれらの境界条件の基で方程式 (14) を解く事である。境界条

件及び方程式に含まれている関数 $f(r)$ は (27) によつて T_1 で陽に表わされている。上下端板及び側壁とも熱伝導性の良い場合は Sakurai & Matsuda (1974), Nakayama & Usui (1974) によつて、側壁が断熱壁の場合は Matsuda, Hashimoto & Takeda (1976), Matsuda & Takeda (1977), 又上下端板が断熱壁の場合は Matsuda & Hashimoto (1976) によつて取り扱われた。ここでは上下端板が断熱壁の場合についてのみ述べる事にする。この場合には Ekman 層内での radial 方向の運動に伴う流体粒子の発熱・吸熱が流れの場に大きな影響を及ぼすので、方程式を解くにあつて heat balance の関係について少し述べて置く。エネルギー式 (6) の左辺が一種の heat source term と見なせる事は先に述べた。Ekman 層では $u \sim O(1)$ であるから Ekman 層内での全発熱(吸熱)量は $O(R E^{\frac{1}{2}})$ になる。一方 inner region での熱伝導による heat flux のオーダーは $O(E)$ である (heat flux $\sim E \nabla T_1$)。今、系の回転があまり早くなくて R が小さい時を考えよう (UF_0 では比熱比 Γ が 1 に非常に近いので G_0 の値如何では R は小さくなり得る)。 $R \sim O(E^{\frac{1}{2}})$ とすると Ekman 層内での発熱(吸熱)量と inner region での heat flux が釣り合う。 $R > O(E^{\frac{1}{2}})$ とすると inner region での熱伝導だけでは Ekman 層内の発熱(吸熱)をまかない切れなくなる。この場合でも、もし上下端板が熱伝導性が良い時には、端板を通じてこの大きな発熱(吸熱)はまかなわれる。しかし端板が断熱壁の場合には、それも不可能となる。従つて Ekman 層内の radial 方向の流れ自身が抑圧される事が予想され、

これは inner region で z 方向の流れの抑制となつて表われるだろう。
 $R \gg O(E^{\frac{1}{2}})$ の時は Ekman 層が完全に消滅 ($C_{\pm} \rightarrow 0$) する事が容易に
 示され 従つてこの場合には $W_{\pm} \rightarrow 0$ となる。そこで具体的な解析例とし
 ては $R \sim O(E^{\frac{1}{2}})$ の時を考え この parameter region で R を大きくしてい
 った時 W_{\pm} の profile がどの様に変化してゆくかを調べる事にする。又、
 側壁の温度分布としては $T_s = \frac{z}{A}$ と線形の温度分布がついてゐるものとする。
 (上下端板は断熱壁)。その時、 T_c を次の様に分解する。

$$T_c(r, z) = T_0(r) + zA^{-1}(1+R)^{-1} + \Phi(r, z). \quad (47)$$

ここで $T_0(r)$ は方程式 (14) の特殊解で

$$T_0(r) = -R \int_r^1 t^{-1}(1+Rt^2)^{-1} dt \int_0^t s^2 \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} - \frac{1}{s^2} \right] f ds. \quad (48)$$

従つて $\Phi(r, z)$ は (14) の同次解である。 $\Phi(r, z)$ とし

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{\cosh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n A)} + b_n \frac{\sinh(\lambda_n z)}{\sinh(\lambda_n A)} \right\} g_n(r) \quad (49)$$

の形を仮定する。 (14) に代入すると $g_n(r)$ について

$$\frac{d}{dr} \left\{ r(1+Rr^2) \frac{dg_n}{dr} \right\} + \lambda_n^2 r g_n = 0 \quad (50)$$

を得る。これは Sturm-Liouville type の方程式で $g_n(r)$ は完全直交系をなす
 (ただし $g_n(1) = 0$ より固有値 λ_n が決定される)。 (49) を境界条件 (26) に代入
 し (今の場合 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$, 又 $\Lambda_2 \equiv RE^{-\frac{1}{2}}$) 少し計算すると a_n, b_n について

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \tanh(\lambda_n A) g_n(r) = -2\Lambda_2 \int_0^r r \varepsilon_B (W_+ - W_-) dr, \quad (51)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \Lambda_2 \sigma r^2 + \lambda_n \coth(\lambda_n A) \right\} g_n(r) = -\frac{\Lambda_2 \sigma r^2 + A^{-1}}{1+R} + \Lambda_2 \sigma r (T_+ - T_-). \quad (52)$$

(51) から $g_n(r)$ の直交性を利用して a_n は陽に解ける。一方 (52) に $rg_m(r)$ を
 掛け 0 から 1 まで積分する事により b_n に対する無限連立方程式を得る。

これを適当な項で打ち切って b_n を数値計算した ($n=60\sim 80$ で充分収束). 数値計算例としては $W_+ = W_- = 0$, $V_+ = -V_- = -\frac{r}{2}$ の場合のみを示す. 又簡単の為 側壁上には温度分布がついていないとした. 即ち $T_s(z) = 0$ (この時には (52) の右辺の第1項が落ちる). 従って循環流は上下端板の角速度差のみによって誘起されている事になる. $G_0 = 1, 0.1, 0.01$ ($\Lambda_2 = 5.3, 0.53, 0.053$) の3通りの場合について T の分布と W の profile を図2, (a), (b), (c) 及び 図3 に示す. G_0 が増えると W が特に中心部で抑圧されているのがよくわかる. 又側壁から Ekman 層(上の)に向って熱伝導により熱が供給されている. これは上の Ekman 層では r を内向きの流れが誘起されている為である. 図は対称性から $z > 0$ の領域だけを示してある.

REFERENCES

- Matsuda, T. & Hashimoto, K. 1976 J. Fluid Mech. 78, 337-354.
 Matsuda, T. & Hashimoto, K. 1976 (submitted to J. Fluid Mech.)
 Matsuda, T., Hashimoto, K. & Takeda, H. 1976 J. Fluid Mech. 73, 389-399.
 Matsuda, T. & Takeda, H. 1977 (submitted to J. Fluid Mech.)
 Nakayama, W. & Usui, S. 1974 J. Nucl. Sci. Tech. 11, 242-262.
 Sakurai, T. & Matsuda, T. 1974 J. Fluid Mech. 62, 727-736.
 Stewartson, K. 1957 J. Fluid Mech. 3, 17-26.

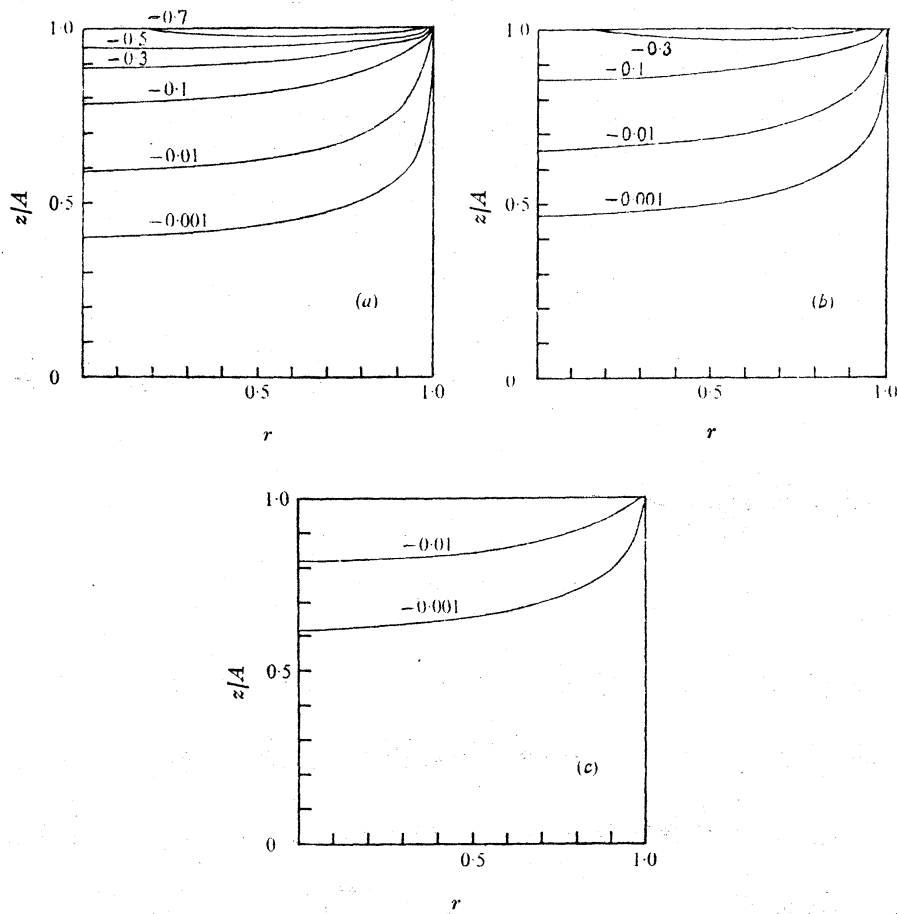


Fig. 2 (a), (b), (c) The temperature fields in the inner inviscid core in the case of mechanically driven flows. The parameter $G_0 = 1$ in (a), 0.1 in (b) and 0.01 in (c).

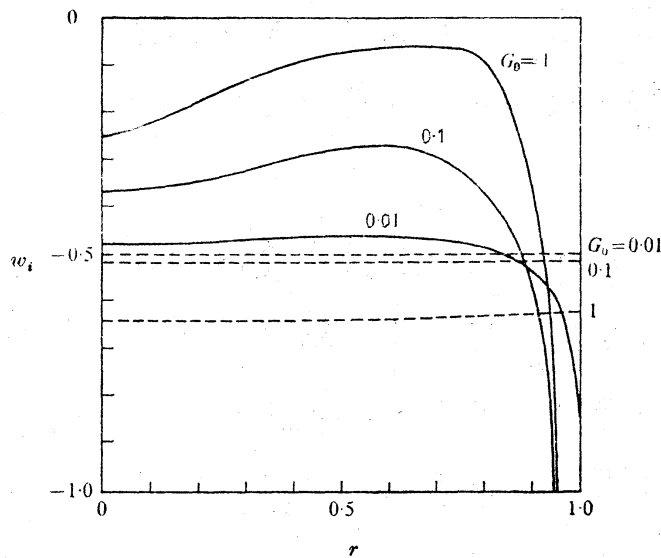


Fig. 3 The axial velocity profiles in the case of mechanically driven flows with $V = \pi r/2$ at $z = \pm A$. The dashed lines show the axial velocity profiles for the case in which the end plates have a constant temperature distribution, i.e. $T = 0$ at $z = \pm A$.